> Version pdf

Graphe (Bac 🎯)

Définition

> **"Point de cours 1 : définition d'un graphe"**

Un **graphe** est un ensemble d'objets appelés **sommets** dont certains reliés deux à deux par des liaisons appelées **arcs**.

En général on associe une *étiquette* ou *nom* à chaque sommet.

Il existe deux grandes familles de graphes :

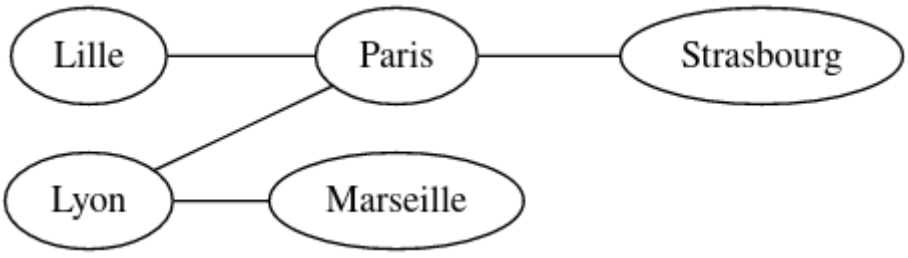
- si les **arcs** peuvent être *orientés* on parle de **graphe orienté**
- sinon de **graphe non orienté**.

On peut aussi associer une *étiquette*, en général une valeur numérique appelée *poids*, à chaque arc : dans ce cas on parle de **graphe pondéré** (qui peut être orienté ou non).

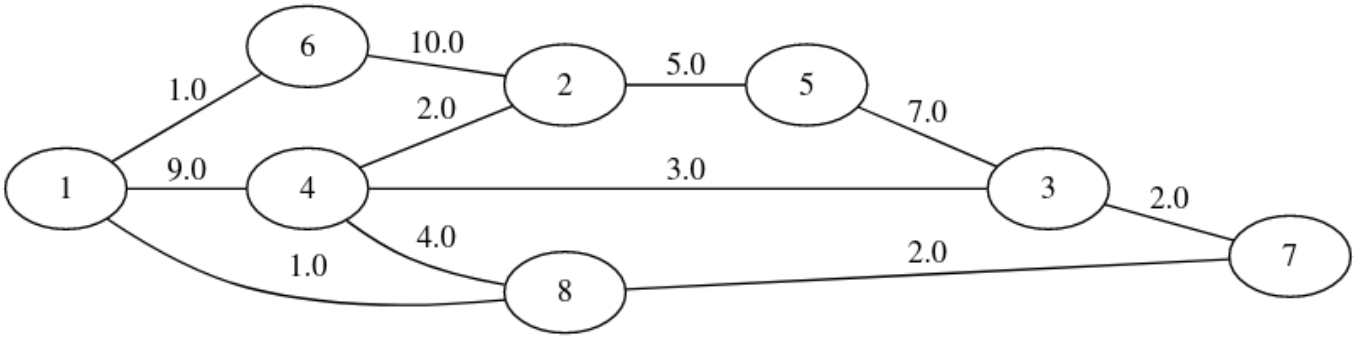
Conventions de représentation graphique :

Type de graphe	Sommet	Arc
Non orienté	Disque avec *étiquette*	`i - j` représenté par un segment
Orienté	Disque avec *étiquette*	`i -> j` représenté par une flèche orientée

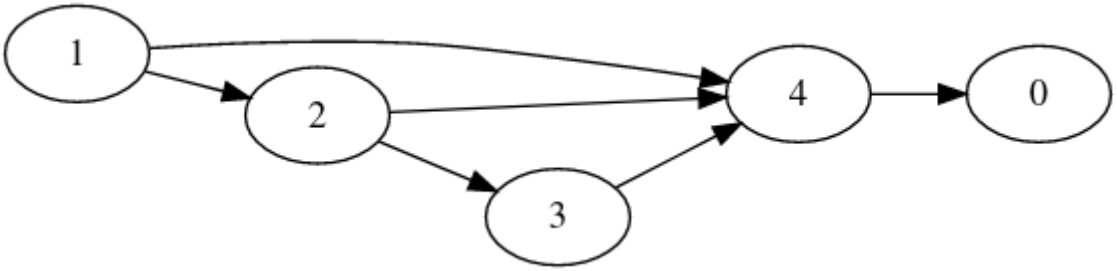
Exemple de graphe non orienté



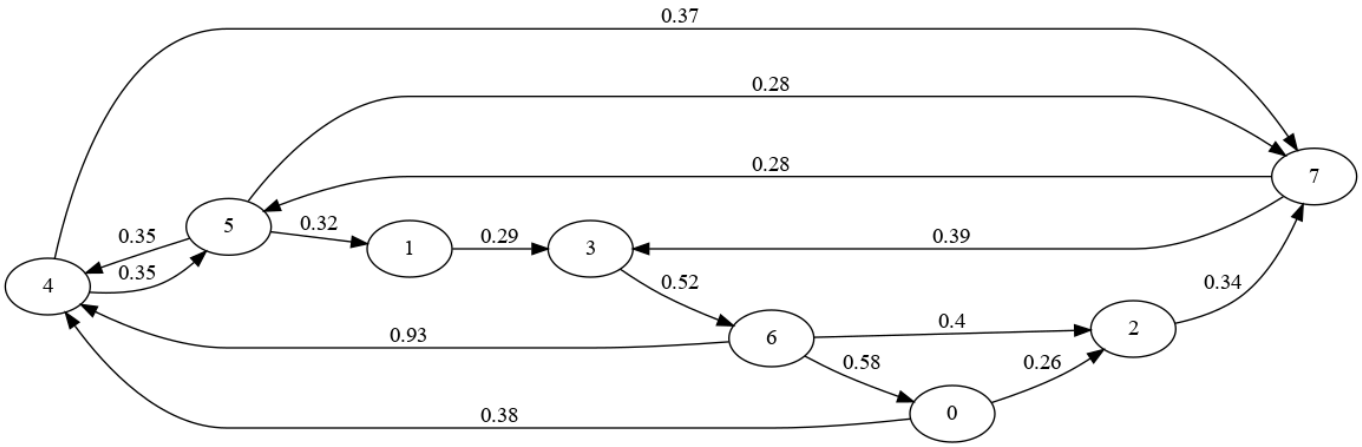
Exemple de graphe non orienté pondéré"



Exemple de graphe orienté



Exemple de graphe orienté pondéré"



Vocabulaire des graphes

"Point de cours 2 : vocabulaire des graphes"

> Sauf mention explicite, les définitions suivantes sont valables pour les graphes orientés ou non orientés. Dans les exemples, pour simplifier on assimile un sommet à son étiquette (qui ici est un entier).

Un graphe est un ensemble de sommets et d'arcs

Un graphe est défini par un ensemble V de **sommets** (*vertices* en anglais) et un ensemble E d'**arcs** (*edges* en anglais) qui sont des couples de sommets.

Les **arcs** peuvent être **orientés** ou **non orientés**.

Un arc est une relation d'adjacence entre deux sommets

Si un arc a pour origine le sommet x et pour extrémité le sommet y, on dit que :

- y est **adjacent** à x ou que y est un **voisin** de x.
- y est un **successeur** de x et que x est un **prédécesseur** de y

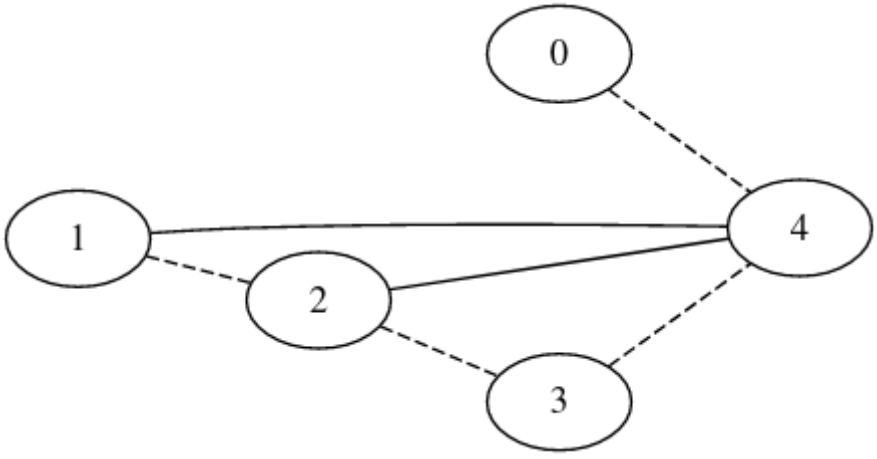
Pour un arc non orienté, on ne distingue pas prédécesseur et successeur et la relation d'adjacence est symétrique : si y est voisin de x alors x est voisin de y.

On note x -> y un arc orienté et $x - y$ un arc non orienté. Pour un arc orienté, on distingue l'arc x -> y de l'arc y -> x.

"Exemples"

Adjacence dans un graphe non orienté

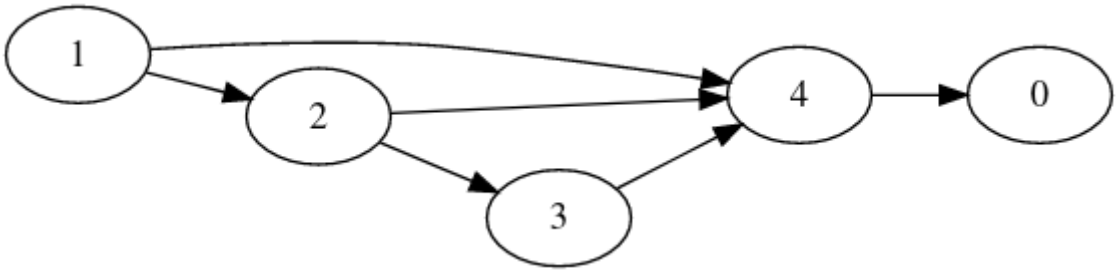
Le sommet 2 est adjacent aux sommets 1, 3 et 4 : il a trois voisins.



Adjacence dans un graphe orienté

Le sommet 2 a deux voisins 3 et 4.

Le sommet 2 est un voisin du sommet 1 mais la réciproque est fausse : l'arc orienté 1 -> 2 définit 1 comme prédécesseur de 2 et 2 comme successeur de 1.



Un chemin est une séquence d'arcs consécutifs

Un **chemin** est une séquence d'arcs consécutifs :

Ainsi le chemin x_0 -> x_1 -> x_2 ... -> x_n part de l'origine x_0 puis par le sommet x_1, puis le sommet x_2 et conduit jusqu'à l'extrémité x_n en suivant des arcs consécutifs.

La **longueur d'un chemin** est le nombre d'arcs qui le constitue.

Un **chemin simple** est un chemin sans répétition d'arcs.

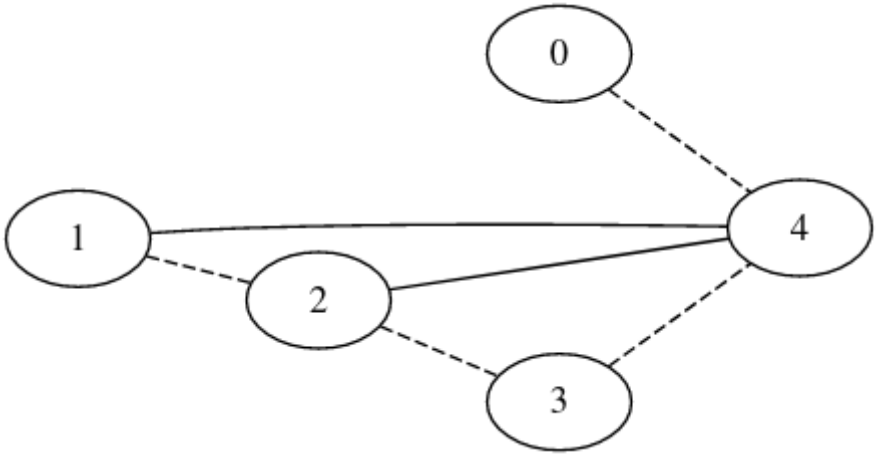
Un **cycle** est un chemin dont l'extrémité coincide avec l'origine.

"Exemples"

Chemin dans un graphe non orienté

0 - 4 - 3 - 2 - 1 est un chemin de longueur 4 dans le graphe non orienté ci-dessous.

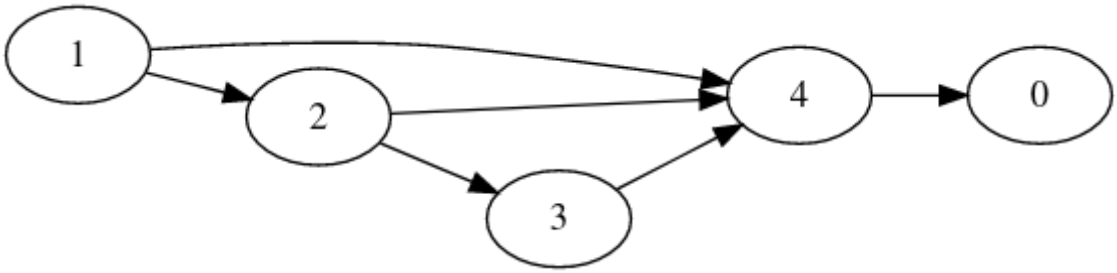
4 - 3 - 2 - 4 est un cycle de longueur 3 dans ce même graphe.



Chemin dans un graphe orienté

1 -> 2 -> 3 -> 4 - > 0 est un chemin de longueur 4 dans le graphe orienté ci-dessous.

Ce graphe orienté ne contient pas de cycles.



Degré d'un arc

Dans un *graphe orienté* :

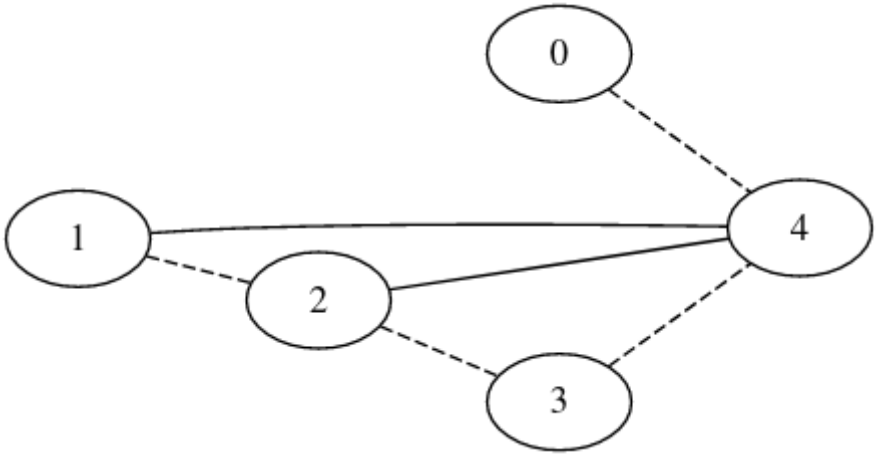
- le **degré sortant** d'un sommet est le nombre d'arcs dont ce sommet est l'origine : c'est le nombre de successeurs de ce sommet
- le **degré entrant** d'un sommet est le nombre d'arcs dont ce sommet est l'extrémité : c'est le nombre de prédécesseurs de ce sommet

Dans un *graphe non orienté*, on ne distingue pas degré sortant et degré entrant : le **degré d'un sommet** est le nombre d'arcs dont il est une extrémité, c'est le nombre de *voisins* du sommet.

"Exemples"

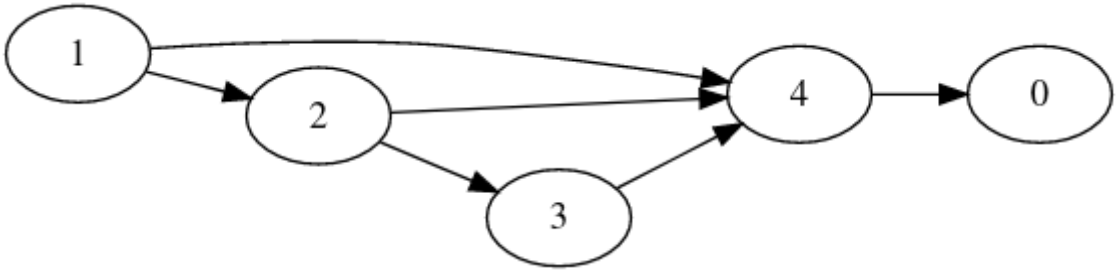
Degrés dans un graphe non orienté

Dans le graphe non orienté ci-dessous le degré du sommet 2 est de trois.



Degrés dans un graphe orienté

Dans le graphe orienté ci-dessous, le degré entrant du sommet 2 est de un et son degré sortant est de deux.



Interface

"Point de cours 3 : une interface pour une classe Graphe"

Pour implémenter les algorithmes de graphe auy programme, l'interface minimale ci-dessous sera suffisante. Le choix d'une structure de données de représentation du graphe dépend de l'implémentation choisie et sera développé dans la section suivante.

L'interface est donnée pour un *graphe non orienté* et implémentée avec une représentation par dictionnaire d'adjacences (voir section suivante).

```
class Graphe:

    def __init__(self, liste_sommets):
        """
        Crée une représentation de  graphe non orienté à partir d'une liste de s
        """
        self.liste_sommets = liste_sommets
        self.adjacents = {sommet : [] for sommet in liste_sommets}

    def sommets(self):
        """
        Renvoie une liste des sommets
        """
        return self.liste_sommets
```

```
    def ajoute_arc(self, sommetA, sommetB):
        """
        Ajoute dans la représentation de graphe l'arc sommetA - sommetB
        """
        assert (sommetA in self.liste_sommets), "sommet A pas dans le graphe"
        assert (sommetB in self.liste_sommets), "sommet B pas dans le graphe"
        self.adjacents[sommetA].append(sommetB)
        # ligne suivante uniquement pour graphe non orienté
        self.adjacents[sommetB].append(sommetA)

    def voisins(self, sommet):
        """
        Renvoie une liste des voisins du sommet dans la représentation du graphe
        """
        assert sommet in self.liste_sommets, "sommet pas dans le graphe"
        return self.adjacents[sommet]

    def est_arc(self, sommetA, sommetB):
        """
        Renvoie un booléen indiquant si l'arc sommetA - sommetB appartient au gr
        """
        assert sommetA in self.liste_sommets, "sommetA pas dans le graphe"
        return sommetB in self.adjacents[sommetA]
```

Différentes représentations d'un graphe

Représentation par matrice d'adjacence

"Point de cours 4 : représentation par matrice d'adjacence"

- On étiquette les sommets de 0 à $n-1$.
- On représente chaque **arc** dans une **matrice d'adjacence**, c'est-à-dire un tableau à deux dimensions où on inscrit un 1 en ligne `i` et colonne `j` si l'arc `i -> j` est dans le graphe.

"Matrice d'adjacence en Python"

En Python, on peut représenter une matrice d'adjacences d'un graphe à n sommets par une liste de n listes de taille n. Si cette matrice est référencée par une variable `mat` et si `0 <= i < n` et `0 <= j < n` alors :

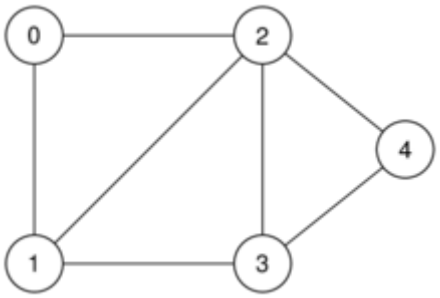
- `mat[i][j]` vaut 1 si l'arc `i -> j` est dans le graphe
- `mat[i][j]` vaut 0 si l'arc `i -> j` n'est pas dans le graphe

> 💡 Pour un graphe non orienté, on ne distingue pas les arcs `i -> j` et `j -> i` donc s'il y a un 1 en ligne `i` et colonne `j` alors il y a un 1 en ligne `j` et colonne `i` . On dit que la matrice d'adjacence est symétrique.

> 💡 Pour un graphe pondéré on peut remplacer le 1 marquant la présence d'un arc par le poids de l'arc.

"Exemple avec un graphe non orienté"

> Source : exemple de Cédric Gouygou



Le graphe non orienté ci-dessus peut être représenté par la matrice d'adjacence ci-dessous. La matrice est symétrique.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voici une représentation en Python :

```
[[0, 1, 1, 0, 0],
 [1, 0, 1, 1, 0],
 [1, 1, 0, 1, 1],
 [0, 1, 1, 0, 1],
 [0, 0, 1, 1, 0]
]
```

Représentation par tableau de listes d'adjacence

"Point de cours 5 : représentation par tableau de listes d'adjacence"

- On étiquette les sommets de 0 à $n-1$.
- On crée un tableau de taille n dont l'élément d'indice `i` contient la liste des sommets `j` *adjacents* au sommet `i`, c'est-à-dire tels que l'arc `i -> j` existe. Cette liste d'adjacence du sommet `i` contient donc :
  - tous les *voisins* de `i` dans un *graphe non orienté*
  - tous les *successeurs* de `i` dans un *graphe orienté*

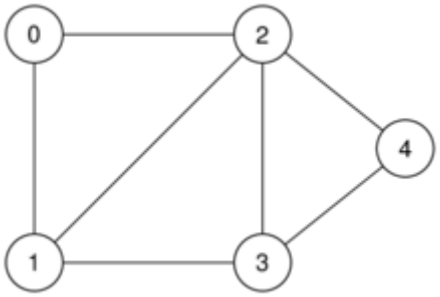
"Listes d'adjacence en Python"

En Python, on peut représenter un tableau de listes d'adjacences par une liste de n listes de tailles variables (contrairement à une matrice d'adjacence où toutes les listes sont de taille n). Si cette liste est référencée par une variable `adj` et si `0 <= i < n` et `0 <= j < n` alors :

- `len(adj)` vaut n car le graphe a n sommets
- `adj[i]` contient la liste de tous les sommets `j` tels que l'arc `i -> j` existe
- `len(adj[i])` est donc le nombre de *voisins* (graphe non orienté) ou *successeurs* (graphe orienté) du sommet `i`

"Exemple avec un graphe non orienté"

> Source : exemple de Cédric Gouygou



Le graphe non orienté ci-dessus peut être représenté en Python par listes d'adjacences comme ci-dessous.

```
adj = [[1, 2],
       [0, 2, 3],
       [0, 1, 3, 4],
       [1, 2, 4],
       [2, 3]
      ]
```

La valeur de `adj[0]` est la liste `[1, 2]` car les voisins du sommet 0 sont les sommets 1 et 2.

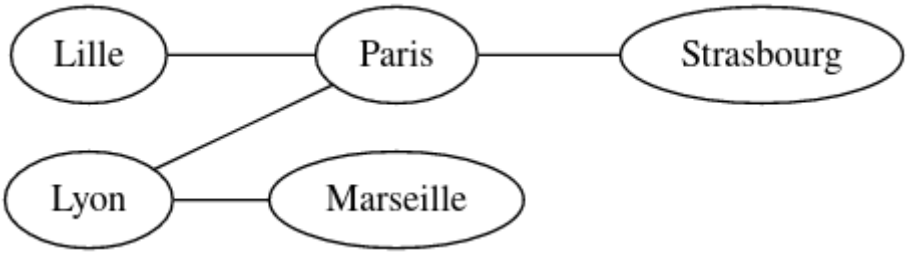
Il faut noter que par symétrie, comme le graphe est non orienté, 0 appartient aux listes d'adjacence `adj[1]` et à `adj[2]` .

Représentation par dictionnaire de listes d'adjacence

"Point de cours 6 : représentation par dictionnaire de listes d'adjacence"

On considère un graphe de n sommets étiquetés par des noms (type `'str'`). On peut reprendre le modèle de représentation par un *tableau de listes d'adjacences* en remplaçant le *tableau* par un *dictionnaire* dont les clefs sont les étiquettes des sommets.

Voici un exemple de graphe avec sommets étiquetés, représenté par un **dictionnaire de listes d'adjacences** en Python.




```
adj_tgv = {"Lyon": ["Paris", "Marseille"],
           "Lille": ["Paris"],
           "Marseille": ["Lyon"],
           "Paris": ["Lille", "Lyon", "Strasbourg"],
           "Strasbourg": ["Paris"]}
```

Comparaison des représentations

"Comparaison des représentations"

Complexité spatiale

Soit un graphe avec un ensemble V de sommets et un ensemble E d'arcs.

Notons n =|V| le nombre de sommets et m= |E| le nombre d'arcs.

Représentation	Complexité spatiale
Matrice d'adjacence	quadratique par rapport au nombre de sommets $O(n^2)$
Listes d'adjacence	$O(n+m)$

On rappelle l'inégalité $n-1 \leqslant m < n^2$.

À l'exception des graphes denses dont le nombre d'arcs est de complexité quadratique par rapport au nombre de sommets, la complexité spatiale d'un tableau de listes d'adjacences est bien meilleure que celle d'une matrice d'adjacence.

Complexité temporelle

Les deux opérations de base sur une représentation de graphe sont :

- le test d'adjacence : l'arc `i->j` existe-t-il ?
- la liste des *voisins* (graphe non orienté) ou *successeurs* (graphe orienté)

Ces opérations ont une complexité par rapport au nombre de sommets n, différente selon les représentations. On donne juste la complexité dans le pire des cas.

Représentation	Tester si l'arc `i->j` existe	Complexité
Matrice d'adjacence	`mat[i][j] == 1`	constante $O(1)$
Listes d'adjacence	`j in adj[i]`	linéaire $O(n)$

Représentation	Lister les voisins/successeurs	Complexité
Matrice d'adjacence	`[j for j in range(n) if mat[i][j] == 1]`	linéaire $O(n)$
Listes d'adjacence	`adj[i]`	constante $O(1)$

En pratique, les algorithmes de parcours de graphe au programme utilisent surtout l'opération de liste des voisins/successeurs, donc les listes d'adjacences seront la représentation privilégiée.

> 💡 Les performances d'un dictionnaire de listes d'adjacences sont comparables à celles d'un tableau de listes d'adjacences. Il serait possible d'améliorer le test d'existence d'un arc, de *linéaire* à *constant*, si on utilisait une table de hachage à la place d'une liste d'adjacences, par exemple un ensemble de type `set` en Python.